

Patronen in Islamitische Mozaïeken

Mozaïeken ontrafelen en zelf nieuwe mozaïeken ontwerpen.



Goossen Karsenberg

Patronen in Islamitische Mozaïeken

Mozaïeken ontrafelen en zelf nieuwe mozaïeken ontwerpen.



Een lesserie voor leerlingen uit de bovenbouw van het vwo.

Auteur: Goossen Karssenbergh (osg De Hogeberg, Den Burg)

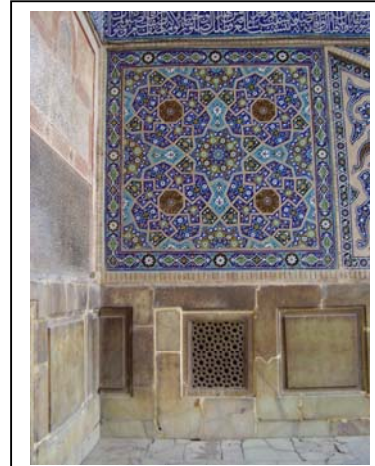
Begeleiding: Prof. J.P. Hogendijk (Geschiedenis van de wiskunde, Mathematisch Instituut Utrecht),
Prof. J.A. van Maanen (Didactiek van de wiskunde, Freudenthal Instituut Utrecht)

Deze lesserie is tot stand gekomen mede dankzij een subsidie van het NWO.

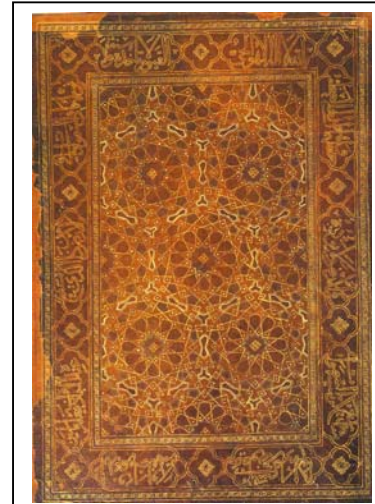
Den Burg, 2010.

Inhoudsopgave:

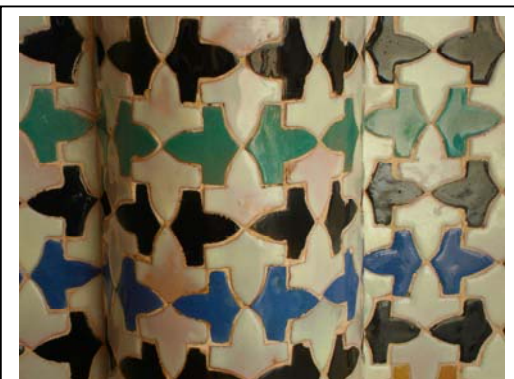
p.	
4	H1 Inleiding
4	1.1 Introductie
6	1.2 Het zeshoek-sterpatroon
10	H2 Mozaïekanalyse basis
14	H3 Diepgaande mozaïekanalyse
14	3.1 Waarom diepgaand?
14	3.2 Hoeken in een mozaïek: De 7-puntige ster
17	3.3 De oppervlakte berekenen van een ster
18	3.4 Sterren combineren
18	3.5 Ster- en rozetdeterminatie
19	3.6 Basispatronen
22	H4 Varianten van een mozaïek maken
24	H5 Een variant uitwerken
25	H6 Afronding



Wanddecoratie in Isfahan,
Iran



Boekomslag



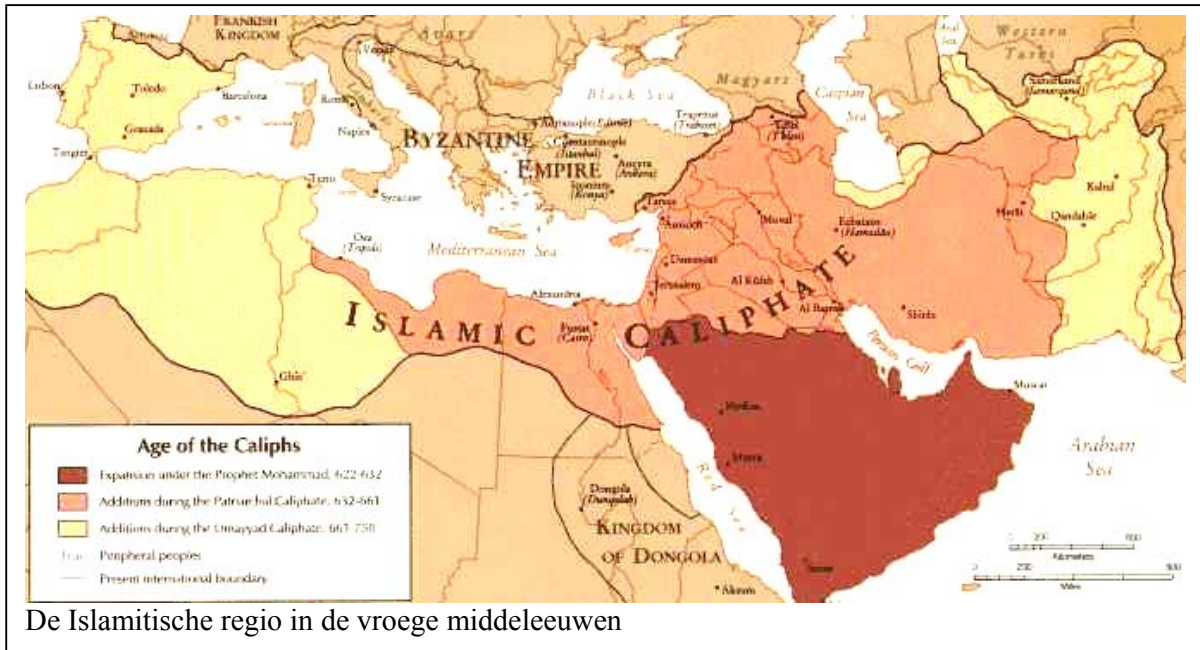
Granada, Spanje



Tanger, Marokko

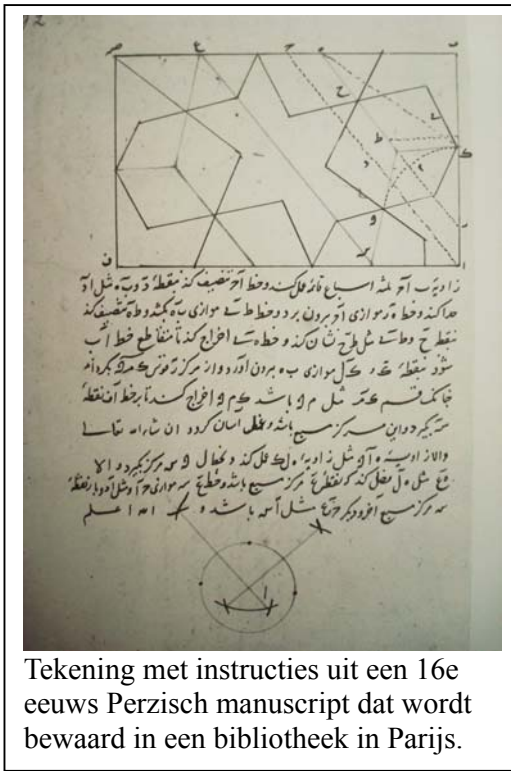
Hoofdstuk 1: Introductie

1.1 Inleiding waarin je kunt lezen wat er zo bijzonder is aan de islamitische architectuur en wat je de komende lessen wiskunde zult gaan doen.



Er is iets heel opmerkelijks aan de middeleeuwse architectuur in het gebied dat zich uitstrekt van Marokko en Spanje, langs geheel noordelijk Afrika, via Turkije tot in Iran en zelfs India. Je komt namelijk heel vaak geometrische patronen tegen die werden gebruikt om pleinen, muren, gewelven en koepels te versieren. Maar 'versieren' is eigenlijk niet het goede woord, want de vorm, grootte en kleur van de mozaïeken hebben een sterke samenhang met de gehele architectuur van het bouwwerk. Zonder de mozaïeken zou een heel groot deel van de architectonische schoonheid van het gebouw wegvallen.

Het belangrijkste kenmerk van deze mozaïeken is het feit dat er altijd een regelmaat in zit. Bepaalde geometrische vormen, bijvoorbeeld een vlieger, een ruit of een ster, keren steeds terug. Ook zijn er vaak spiegelsymmetrieën en draaisymmetrieën te vinden in de gebruikte patronen. Er zijn enorm veel verschillende mozaïeken ontworpen, elk met hun eigen bijzonderheden. Je komt ze niet alleen in de architectuur tegen, maar ook in vele Arabische en Perzische geschriften. Het is uniek dat al vanaf de achtste eeuw zulke mooie patronen zijn ontworpen en er schuilt heel wat meetkunde achter deze ontwerpen. Vandaar ook dat je in de wiskundeles deze patronen gaat ontrafelen.



Tekening met instructies uit een 16e eeuws Perzisch manuscript dat wordt bewaard in een bibliotheek in Parijs.

Hoe komt het dat deze abstracte kunstvorm zich juist in noordelijk Afrika en Spanje, Syrië, Egypte, Turkije en het oude Perzische rijk ontwikkelde? De verspreiding van de islam over deze gebieden speelde hierbij een cruciale rol. Omdat deze religie afbeeldingen van mensen en dieren op religieuze gebouwen niet toestaat, werd gezocht naar andere vormen van decoratie. Maar er was ook nog iets anders waardoor het ontwerpen van geometrische patronen gestimuleerd werd. In de culturele centra van de islamitische regio bloeide de wetenschap tijdens de middeleeuwen. Niet alleen de theologie en geneeskunde, maar ook astronomie, meetkunde en algebra ontwikkelden zich sterk. Er werden bijeenkomsten georganiseerd tussen wiskundigen en mozaïekontwerpers. Tijdens deze bijeenkomsten werden meetkundige problemen besproken. De ontwerpers gebruikten de informatie die ze kregen van de wiskundigen om nog mooiere patronen te ontwerpen. Van zulke bijeenkomsten hebben nog enkele verslagen de tand des tijds doorstaan. Ze worden bewaard in bibliotheken in bijvoorbeeld Istanbul, Caïro, Teheran en ook in Leiden. Het ontstaan van de prachtige mozaïeken is dus ook te danken aan de samenwerking tussen ontwerpers en wiskundigen. Verder wijzen velen op het idee dat men juist met de abstracte, meetkundige ontwerpen wilde verwijzen naar de wijsheid en grootsheid van Allah. Dit idee wordt versterkt door het feit dat op veel manuscripten teksten met wiskundige berekeningen worden afgesloten met zinsneden als: "God weet het het allerbest".

In deze serie lessen ga je mozaïeken ontrafelen en ontwerpen. Je gaat onderzoeken hoe ze destijds ontworpen zouden kunnen zijn. Je zult zien dat je daarbij een aantal wiskundige vaardigheden nodig hebt. Daarom gaan we ook rekenen aan mozaïeken, vooral aan sterren. Vier-, vijf-, zes- en achtpuntige sterren komen vaak voor. Maar ook de meetkundig lastigere zevenpuntige ster en zelfs negen- en elfpuntige sterren kom je tegen. Nadat je het rekenwerk en de ontwerptechniek hebt geoefend ga je, uitgaande van bestaande mozaïeken, ook zelf unieke nieuwe mozaïeken ontwerpen en verfraaien met kleuren, versieringen of speciale technieken. Het resultaat laat je met je groep zien in een presentatie van een aantal posters.



Mozaïek waarin regelmatige 6- en 12-puntige sterren en regelmatige achthoeken te zien zijn.

Om dit allemaal te kunnen doen heb je de volgende materialen nodig:

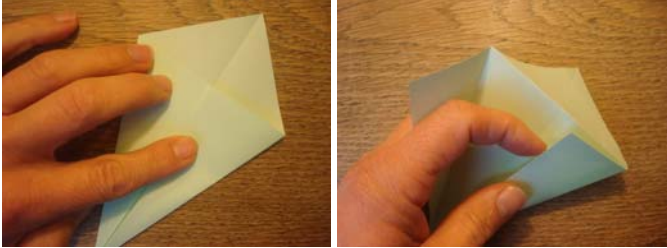
- Een scherp potlood of vulpotlood met gum,**
- een zwartschrijvende fineliner of pen,**
- een geodriehoek,**
- een passer** (Onmisbaar! Die gebruikte men destijds ook heel veel),
- kleurtjes** om de ontworpen mozaïeken mooi uit te laten komen op de poster,
- schaar, lijm en plakband,**
- rekenmachine.**

Een passer is onmisbaar bij het ontwerpen van mozaïeken.

1.2 Een eenvoudig voorbeeld: Het zeshoek-ster-patroon, waarbij je zult zien dat zelfs de meest simpele mozaïeken al veel wiskundige bijzonderheden herbergen.

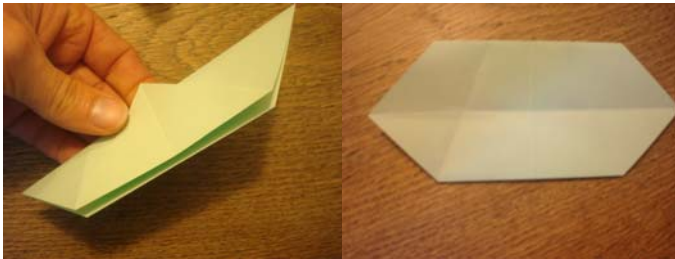
Instructies bij het maken van een zeshoek die past bij het sterpatroon.

Vouw het vierkante vouwblaadje langs een diagonaal.

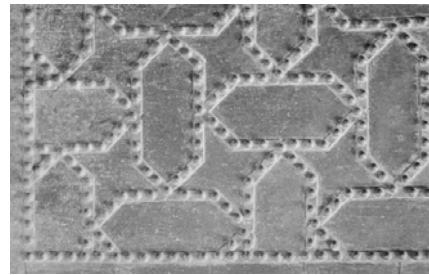


Vouw vervolgens twee hoekpunten naar de diagonaal zodat een vlieger ontstaat.

Vouw de bovenpunt van de vlieger om en vouw de onderkant weer open.



Vouw het blaadje nu dubbel langs de andere diagonaal en maak een 'bootje' zoals op de foto. De omgevouwen driehoeken moeten perfect gelijk zijn! Het 'bootje' weer openvouwen en de zeshoekige 'tegel' is klaar.



Dit voorbeeld van het zeshoek-sterpatroon is te vinden in het Alhambra, een oud moors paleis in Granada, Spanje.

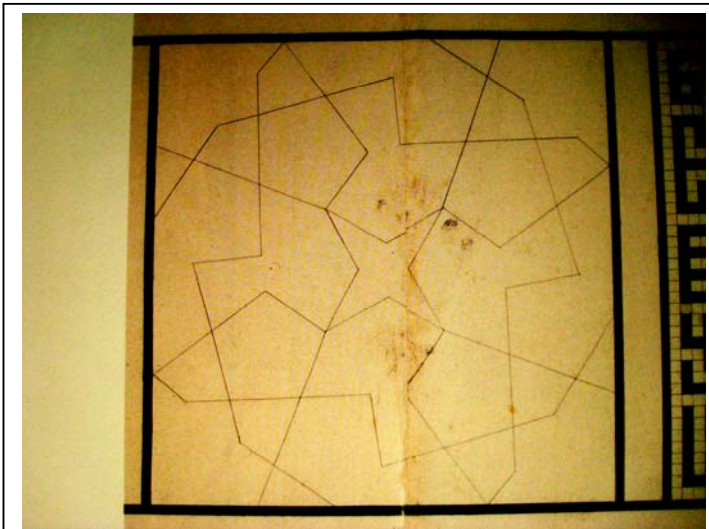
Om te beginnen kijken we naar een vrij eenvoudig voorbeeld van een tegelpatroon: Een zeshoek-sterpatroon. Dit patroon vind je als bestrating in Cairo, maar ook bijvoorbeeld op een grote deur in Granada (Spanje).

De betegeling is opgebouwd uit twee tegelvormen: Een vierpuntige ster en een zeshoek met drie paar evenwijdige zijden. Maak met je groep een voorbeeld van dit type mozaïek met vouwblaadjes. Volg de instructies die hiernaast staan. Per groepje zijn een stuk of 15 tegels nodig.

Opdracht 1 (Groepsopdracht: Het patroon en de uitwerkingen moeten op één postervel worden ingeleverd. Individueel: Één vouwblaadje in je werkboek plakken.)

- Vorm met minstens negen zeshoeken het gewenste patroon. Plak ze vast op een groot vel.
- Teken in één ster de vier spiegelsymmetrieassen. Leg uit waarom deze symmetrieassen alleen bij de ster horen en niet bij het gehele patroon. (Dit komt bij heel veel islamitische patronen voor! We noemen dit in het vervolg lokale symmetrie. 'Lokaal' betekent hier 'in een deelgebied'.)
- Uit de symmetrie van de sterren volgt dat de lange zijden van de zeshoeken twee keer zo groot zijn als de korte. Leg dit uit. Controleer dit door de afmetingen van de vouwblaadjes te meten. Hoe is deze lengteverhouding ontstaan bij het vouwen?
- Bereken de (binnen-)hoeken van de vierpuntige ster (vier van de acht hoeken zijn dus groter dan 180 graden!). Maak gebruik van het gegeven dat de zeshoeken twee rechte hoeken hebben.
- Hoe groot is de som van alle hoeken van de vierpuntige ster?
- Maak met vier andere zeshoekige vouwblaadjes een regelmatige achthoek met een vierkant 'gat'. Hoeveel graden is de hoek van elk hoekpunt van een regelmatige achthoek?
- Het antwoord bij vraag f) maal acht is gelijk aan het antwoord bij vraag e). Controleer dit. Weet je een verklaring?
- Teken alle symmetrie-assen van het patroon als geheel. Stel je hierbij voor dat het patroon in alle richtingen oneindig ver doorloopt. Gebruik stippellijnen.

De middeleeuwse ontwerpers werkten natuurlijk niet met vouwblaadjes. Het is vrijwel zeker dat men destijds mozaïeken ontwierp door één of een paar zogenaamde cellen te tekenen met behulp van pen, passer en liniaal. Dit blijkt ook uit ontwerptekeningen die bewaard zijn.



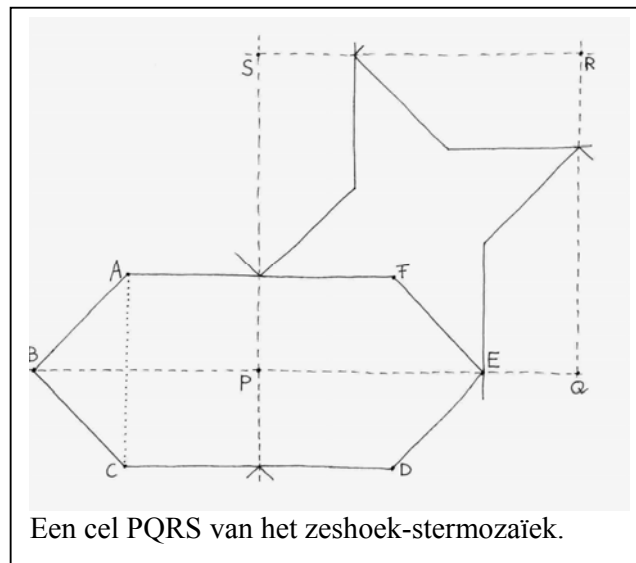
Tekening van een cel van een mozaïek met vier- en tienpuntige sterren. Bron: Topkapirollen, 16^e eeuw, bewaard in Istanbul.

Een ‘cel’ is een klein deel van een mozaïek waarmee je, vaak samen met zijn spiegelbeeld, het gehele mozaïek kunt opbouwen. In andere woorden: Als je van een cel en zijn spiegelbeeld stempels zou maken, dan kun je een compleet mozaïek stempelen! Meestal liggen de randen van een cel op symmetrieassen van het gehele mozaïek. Een cel is vaak vierkant, maar kan ook bijvoorbeeld een rechthoekige vorm hebben.

In de figuur hieronder zie je dat het vierkant PQRS een cel is van het zeshoek-ster patroon. Slechts een kwart van tegel ABCDEF valt binnen deze cel.

Opdracht 2 (I)

- Ga uit van het patroon uit de figuur waarbij lengte **AB** 5 cm is en **AF** en **CD** dus 10 cm. Gebruik de stelling van Pythagoras om lengte **AC** exact te berekenen. Bereken daarna de oppervlakte van zeshoek **ABCDEF**. Geef een exacte waarde en een benadering in drie decimalen.
- Bereken ook de exacte en benaderde oppervlakte van cel **PQRS** van dit patroon.
- Uit je antwoorden bij opdracht **a)** en **b)** kun je de oppervlakte van een ster afleiden. Doe dit. Als je berekeningen kloppen krijg je een mooi rond getal als uitkomst!
- Leg met behulp van een cel uit dat je in een enorm groot mozaïek ongeveer evenveel sterren als zeshoeken kunt verwachten. Bereken hoeveel procent van de oppervlakte van het patroon wordt ingenomen door sterren.



Een cel PQRS van het zeshoek-stermozaïek.

Tot nu toe heb je gekeken naar zeshoek-sterbetegelingen waarbij de zeshoeken twee rechte hoeken hebben. Maar je kunt deze hoek ook groter of kleiner dan 90 graden maken. Dan ontstaat een patroon van sterren met spitsere punten, of juist met stompere punten. In de volgende opdracht maak je met je groep of met je klas een patroon van sterren met een verloop in spitsheid van de sterpunten. Zo ontstaat een abstract Maurits Escher-achtige variant van een islamitisch patroon.

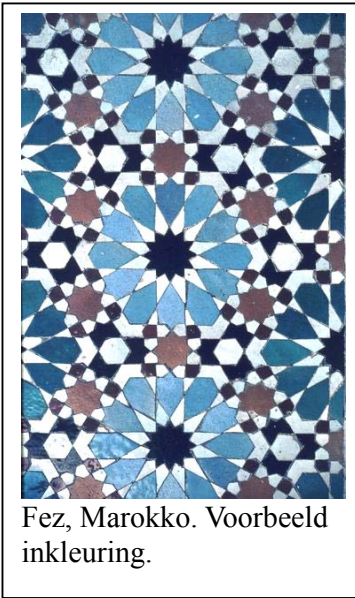


Opdracht 3 (I, Voorbereiding van opdracht 4)

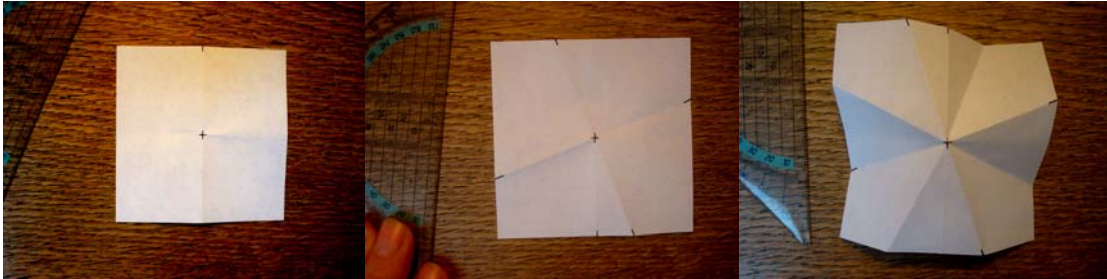
Maak met behulp van de instructies op de volgende bladzijde een cel van een gedraaide ster op een klein vierkant blaadje. Spreek eerst met je groep of met de klas af welke draaihoek je kiest: Een kleine hoek betekent spitse sterpunten, een draaihoek net onder de 45 graden betekent stompe sterpunten. Maak 'sprongen' van maximaal 5 graden want anders sluiten de sterren niet goed aan. Spreek af hoeveel kopieën je maakt, ook van het spiegelbeeld! Gebruik hierbij een fineliner of zwartschrijvende pen voor een goed contrast.

Opdracht 4 (opdracht voor de hele klas of voor je groep, eindresultaat wordt getoond bij de presentatie!)

- a) Leg de cellen van de groepsleden bij elkaar zodat ze zo goed mogelijk aansluiten. Je moet natuurlijk wel wat sjoemelen doordat de draaihoeken een beetje verschillen. Laat de draaihoek in een bepaalde richting regelmatig oplopen. Misschien moet je een paar cellen extra tekenen om een compleet resultaat te krijgen. Plak de definitieve vorm met plakband aan elkaar.
- b) Leg een groot vel papier over jullie ontwerp en trek de stervormen over. Kleine oneffenheden kun je nu aanpassen. Zorg wel dat de lange zijden van de zeshoeken steeds perfect evenwijdig zijn.
- c) Maak de tekening af door bijvoorbeeld de sterren en/of de zeshoeken te kleuren, of juist de grenslijnen te accentueren met stippen, bladmotieven of andere versiersels. Laat je inspireren door de mozaïeken die zijn afgebeeld in dit boekje of door foto's van bijvoorbeeld de site: www.patternislamicart.com.

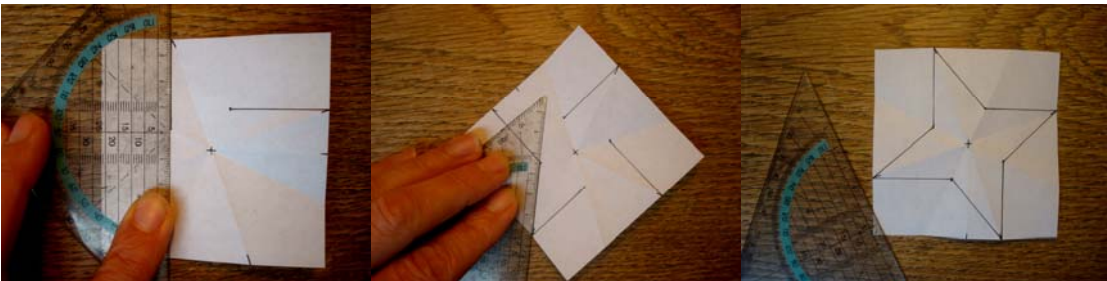


Instructies voor het tekenen van een gedraaide ster op een vierkant blaadje

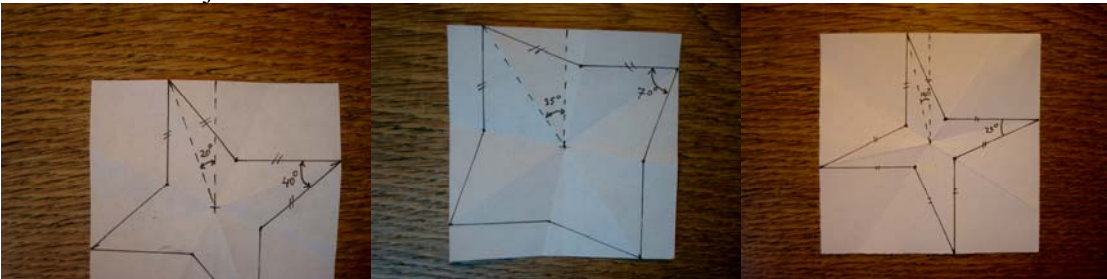


Vouw het vierkante blaadje twee keer dubbel om het midden te vinden. Markeer dit punt. Teken met je geodriehoek de afgesproken draaihoek (op de foto is de hoek 20 graden) en vouw twee keer dubbel zodat een scheef kruis ontstaat. Markeer de uiteinden van dit kruis: Daar komen de sterpunten.

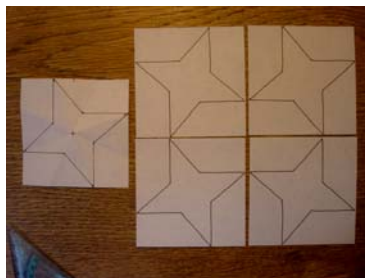
Vouw een tweede scheef kruis dat precies 45 graden gedraaid is ten opzichte van het eerste kruis. Op dit scheve kruis vallen de vier andere hoekpunten van de ster. Resultaat zie foto 3.



Teken met je geodriehoek vier lijnstukken vanuit de sterpunten, telkens evenwijdig aan een rand van het blaadje. Maak de ster af.



Hier zie je het resultaat bij drie verschillende draaihoeken.



Trek de ster op de achterkant van het blaadje over. Maak het afgesproken aantal kopietjes van de cel en zijn spiegelbeeld door de voor- en achterkant over te trekken op even grote blanco vierkante blaadjes. Noteer op een hoek van elk blaadje de gebruikte draaihoek!

2 Mozaïekanalyse basis

Elk mozaïek heeft zijn eigen kenmerken. Als je onderstaande stappen volgt, leg je de belangrijkste eigenschappen bloot en kun je vervolgens beter beoordelen waardoor je het mozaïek mooi of juist niet mooi vindt en wat opvallend is aan het patroon.

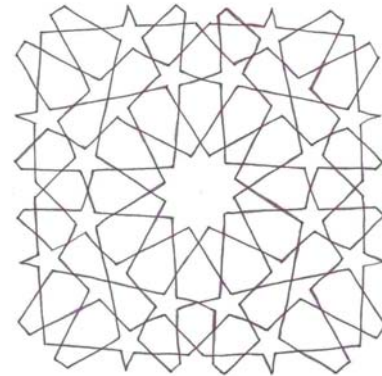
De zes stappen voor basisanalyse

1. Is het uitgangspunt een foto, dan eerst de grenslijnen tussen de tegels overtrekken.
2. Stippel alle symmetrieassen van het mozaïek als geheel. Gebruik overtrekpapier of een blanco blaadje met een lichtbak (of tegen het raam houden!).
3. Zoek alle plaatsen met draaisymmetrie. Zet dikke stippen op de draaicentra en schrijf er het aantal draaistappen bij. Gebruik d voor lokale draaisymmetrie en r voor rotatie-symmetrie van het gehele mozaïek. Bij lokale draaisymmetrie trek je een cirkel waarbinnen de symmetrie nog geldig is.
4. Kies een cel. Zoek ook een zo klein mogelijke cel.
5. Maak een lijst van alle typen tegels in het mozaïek. Vul het schema verder in.
6. Noteer opvallende zaken. Denk bijvoorbeeld aan veel voorkomende hoeken, tegels die symmetrisch lijken maar het niet precies zijn, het lijnenspel in het patroon. Geef tot slot je eigen mening.

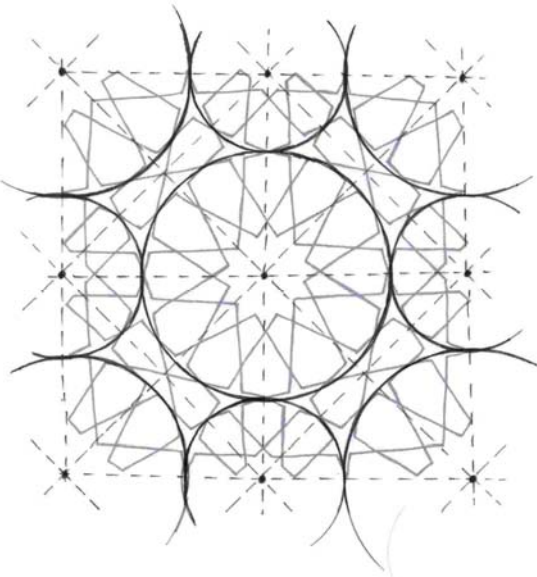
Bekijk als voorbeeld het mozaïek hiernaast uit Yazd, Iran dat ook op de voorpagina is afgebeeld. Bestudeer de verdere analyse op de volgende drie bladzijden.



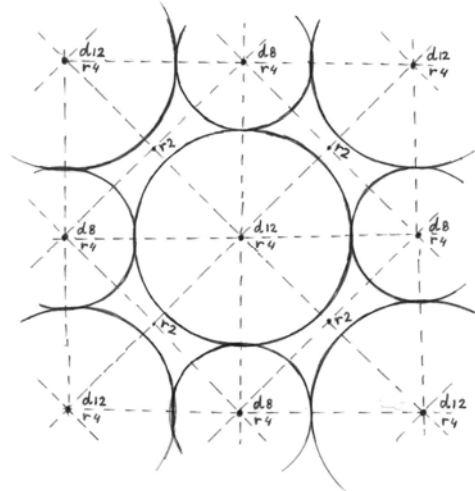
De oorspronkelijke foto van het mozaïek uit Yazd.



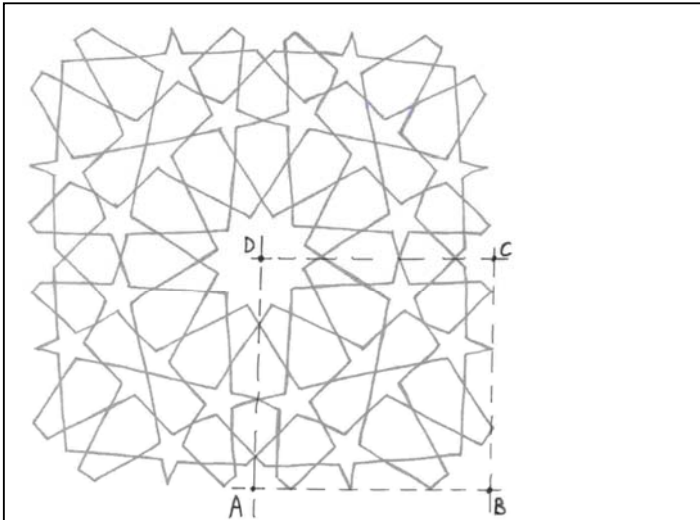
Stap 1: De betegeling zonder



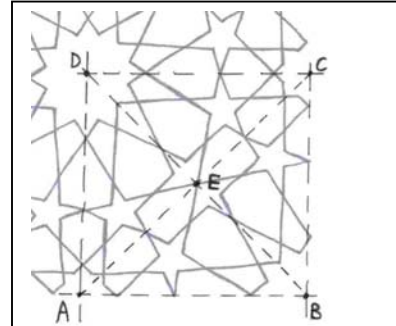
Stap 2, 3: Symmetrieën van het mozaïek. Merk op dat, wanneer je het mozaïek uit zou breiden, er meer 12-, maar ook 8-puntige sterren verschijnen!



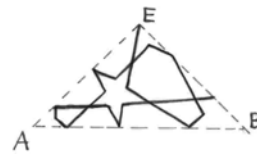
Stap 3: lokale draaisymmetrieën aangeven met de letter d en draaisymmetrie van het gehele patroon



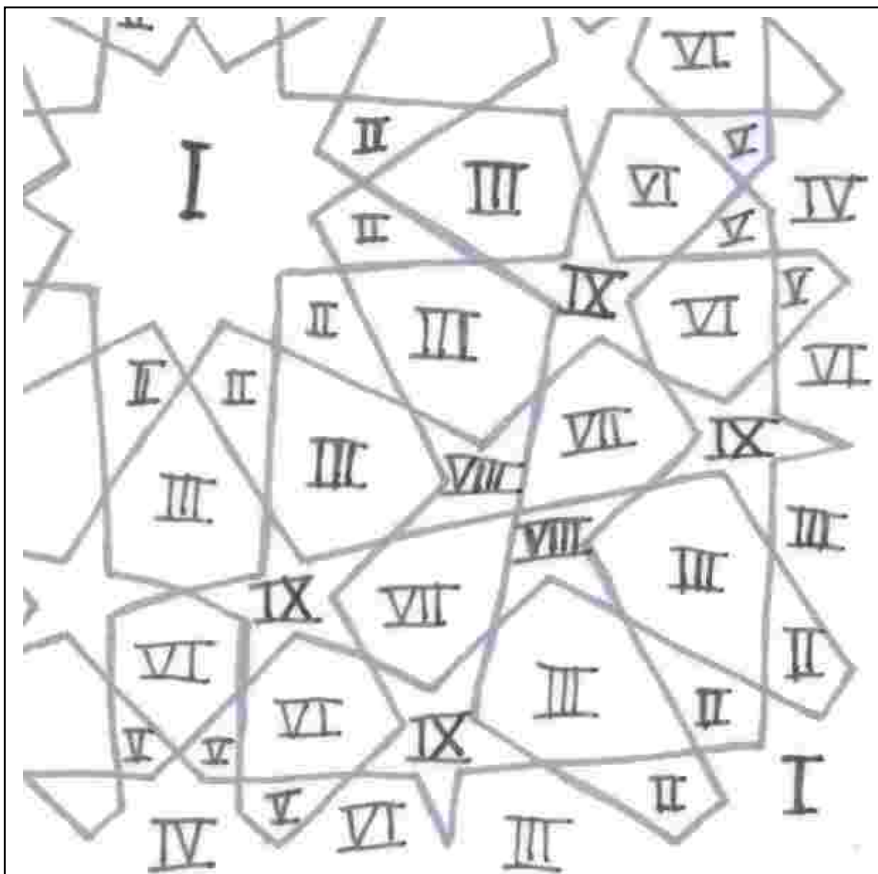
Stap 4: Een cel kiezen. Hier is gekozen voor vierkant ABCD. (Het vierkant is niet perfect. Dit komt door perspectivische vertekening van de foto.)



Een voorbeeld van de kleinst mogelijke cel is driehoek ABE.


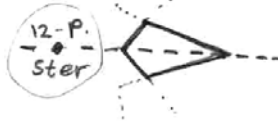




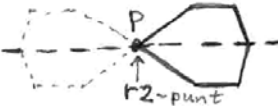
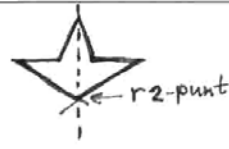
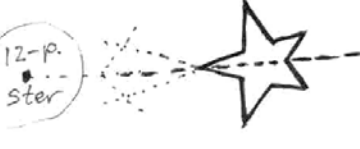


Met alleen de lijnen binnen deze driehoek kun je dus het hele mozaïek opbouwen!



Stap 5: Het nummeren van de negen verschillende soorten tegels. Zorg dat je tegels die op elkaar lijken, maar niet precies gelijk zijn, verschillend nummert! (Hier zijn dat b.v. tegels nr. VI en nr. VII.)

Stap 5: Lijst met typen tegels van het mozaïek uit Yazd, Iran

No.	Naam:	Schets:	Eigenschappen, Bijzonderheden
I	12-puntige ster		Regelmatig. 12 symmetrieassen.
II	Vlieger 1		Met spitse punten, liggen rondom 12-p. sterren (I).
III	Zeshoek 1		De grootste van dit type, hebben één symmetrieas, liggen rondom ster I.
IV	8-puntige ster		Regelmatig. Kleiner dan I. Ster punten zijn 90° .
V	Vlieger 2		Ongeveer gelijkvormig met II. Liggen rondom de 8-puntige sterren (IV).
VI	Zeshoek 2		Lijken op III, maar iets kleiner. Liggen rondom IV.
VII	Zeshoek 3		Lijken op VI, alleen is hoek P kleiner.
VIII	Zeshoek 4		Twee concave hoeken (groter dan 180°), één symmetrieas.
IX	5-puntige ster		Asymmetrisch, het lijkt erop dat ze wel nog één symmetrieas hebben die door het middelpunt van een 12-puntige ster loopt.

Vervolg stap 5: Alle typen tegels op een rijtje, met hun eigenschappen.

Laatste deel stap 5: Overzicht van hoe vaak elk tegeltype voorkomt in één cel ABCD

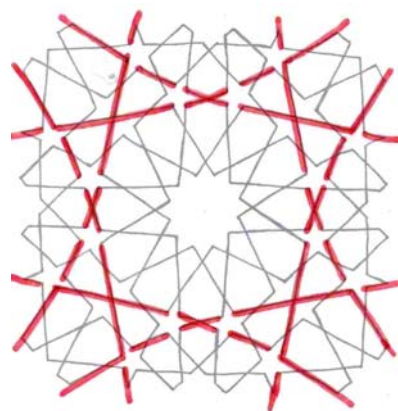
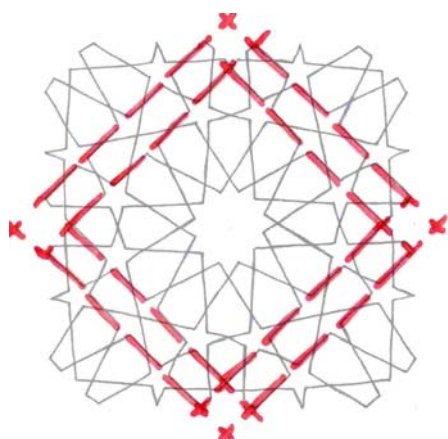
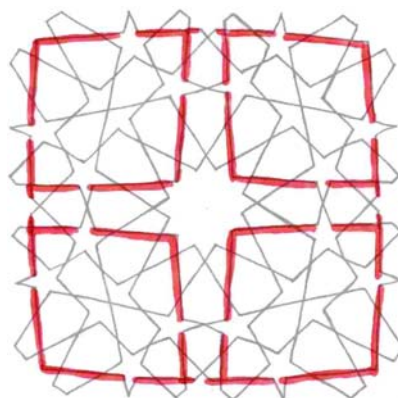
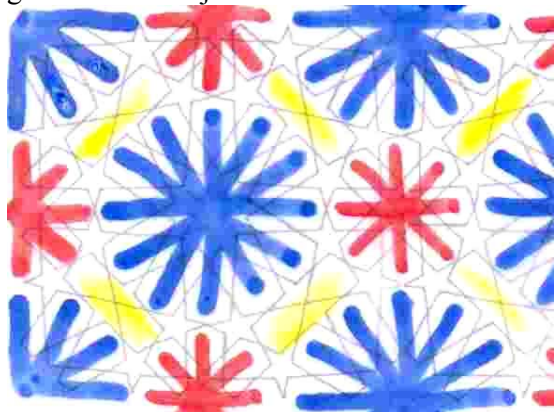
Tegel:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Aantal in cel ABCD:	0,5	6	6	0,5	4	4	2	2	4

Stap 6: Opvallende zaken:

-Er zijn geen 'driesprongen' of 'vijfsprongen': Alle lijnen snijden elkaar als in een kruispunt van twee wegen.

-Veel voorkomende hoeken: rond de 35 tot 40° en 140 tot 145°, 90 en 135° bij de 8-puntster, ongeveer 95 en 65° bij de 12-puntster.

-Het patroon bestaat uit zogenaamde rozetten, zie afbeelding hieronder, met twaalfvoudige draaisymmetrie (blauw) en achtvoudige draaisymmetrie (rood) die tegen elkaar liggen, met gele 'tussenbalkjes'.



-Lijnenspel: Er zijn ruiten te herkennen (zie afbeelding rechtsboven), de twaalfpuntige sterren zijn omringd door vierkanten (zie linksonder) en licht gekromde lijnen vormen rond elk twaalfvoudig rozet een achtpuntige ster.

Eigen mening: De auteur van dit boekje vindt dit een mooi mozaïek (anders had hij het ook niet gekozen om als voorbeeld te dienen!) juist vanwege dit lijnenspel en omdat twaalf- en achtvoudige draaisymmetrie zo mooi zijn gecombineerd. Het mozaïek is ook mooi evenwichtig: De groottes van de tegels verschillen niet enorm (behalve dan de twaalfpuntige ster, maar dat is dan ook de centrale vorm en deze is versierd met een extra bloem) en verschillende tegels (b.v. **III**, **VI** en **VII**) lijken zo veel op elkaar dat ze, mede doordat gelijke versieringen zijn gebruikt, nauwelijks van elkaar zijn te onderscheiden.

Kritiekpuntje: Het mozaïek is, samen met de weelderige versieringen, aan de drukke kant.

Je gaat nu zelf een aantal mozaïeken analyseren, om te beginnen niet zulke moeilijke als de bovenstaande.

Opdracht 5 (I)

Maak met je groep (of met de klas) een soortgelijke analyse van het mozaïek hiernaast. Stap 1 is al voor je gedaan, zie het werkblad. Neem voor stap 1, 2 en 3 overtrekpapier. Gebruik één mozaïek voor stap 4 (cel tekenen en kleinste cel zoeken) en één mozaïek voor het tegelnummeren (stap 5). Geef met kleurtjes bijzonderheden aan en licht deze toe bij stap 6.

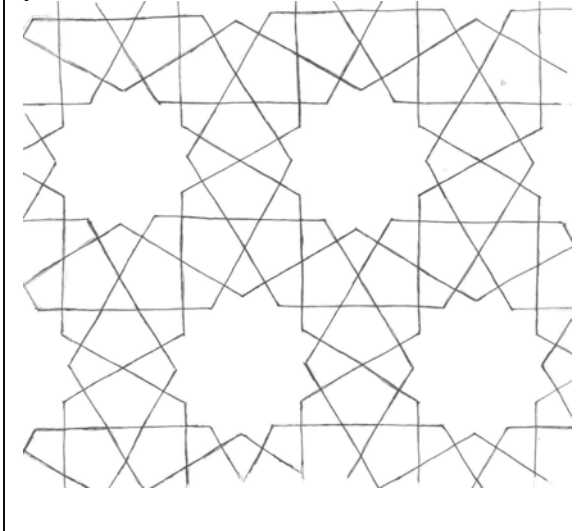
Opdracht 6 (I)

Analyseer één tamelijk eenvoudig en één wat complexer mozaïek uit het werkboekje. Zorg dat iedereen in je groepje andere mozaïeken analyseert!



Mozaïek uit Granada, Spanje. Het reliëf is in pleisterwerk gemaakt. In de twaalfpuntige ster staat in arabisch schrift een religieuze uitspraak.

Hieronder zie je een groter deel van het patroon.



3 Diepgaande mozaïekanalyse

3.1 Waarom een nog nauwkeuriger analyse?

Het is nu al wat duidelijker wat elk mozaïek bijzonder maakt. Je weet nu welke eigenschappen van mozaïeken je zoal kunt onderzoeken: Spiegel- en draaisymmetrie, de grootte van de lokale draaisymmetrie met behulp van cirkels, de vorm van de tegels en het 'lijnspeel'.

Maar het is nog niet erg duidelijk hoe men tot de ontwerpen kwam. Ook om zelf nieuwe ontwerpen te kunnen maken is het nodig om daar iets meer over te weten te komen.

Hierbij kunnen twee dingen helpen. Ten eerste meer kennis over de hoeken die in ontwerpen voorkomen, vooral bij sterren. Dan kun je het soort vragen beantwoorden als: Hoe kun je de hoeken veranderen om het mooiste effect te krijgen? Hoe verandert de oppervlakte van de tegel als de hoek verandert?

Ten tweede is het handig om meer te weten te komen over basispatronen. Dit zijn patronen die uit een klein aantal vrij eenvoudige tegels zijn opgebouwd. Ze worden gebruikt als hulpmiddel om ingewikkelder patronen te ontwerpen. Deze twee onderwerpen komen nu aan de orde.

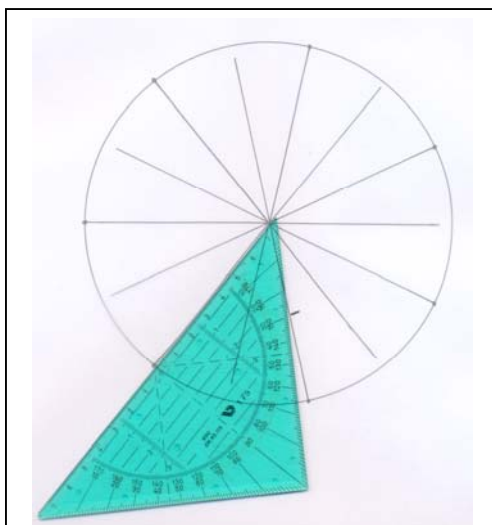
3.2 Hoeken in een mozaïek:

De zevenpuntige ster als voorbeeld

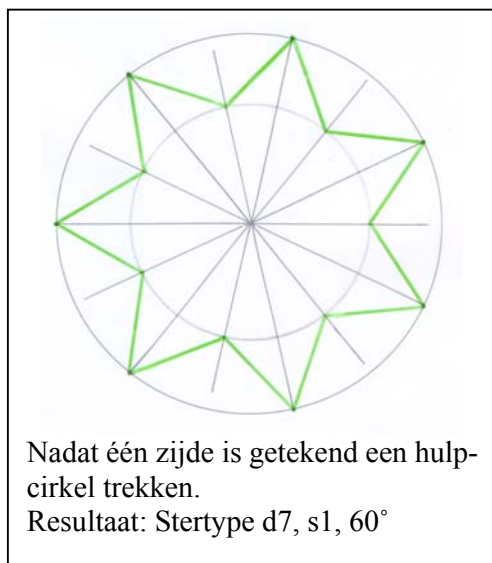
Zoals je al hebt gezien komen in mozaïeken verschillende soorten sterren en rozetten voor. Aan de hand van een cirkel met op de rand zeven stippen op regelmatige afstand tot elkaar zie je hier een paar typen sterren en de wijze waarop je ze kunt construeren. Merk op dat de cirkel met zeven hulplijnen door het middelpunt is verdeeld in 14 gelijke sectoren. Elke ster krijgt zijn eigen 'code':

d7, s1, 60° betekent bijvoorbeeld dat de ster 7-voudige draaisymmetrie heeft, van type 1 is (de meest eenvoudige ster) en dat de punten hoeken van 60° hebben. Bij het construeren van deze ster hoeft je maar één keer met je geodriehoek een punt te construeren. Daarna construeer je de binnencirkel en kun je de andere sterpunten gemakkelijk tekenen.

Een ster van het type s2, 60° is aan de 'buitenkant' hetzelfde als type s1, 60°. Aan de 'binnenkant' zijn de lijnen echter verder doorgetrokken zodat vliegers ontstaan die rondom een kleinere ster met stompe punten liggen.

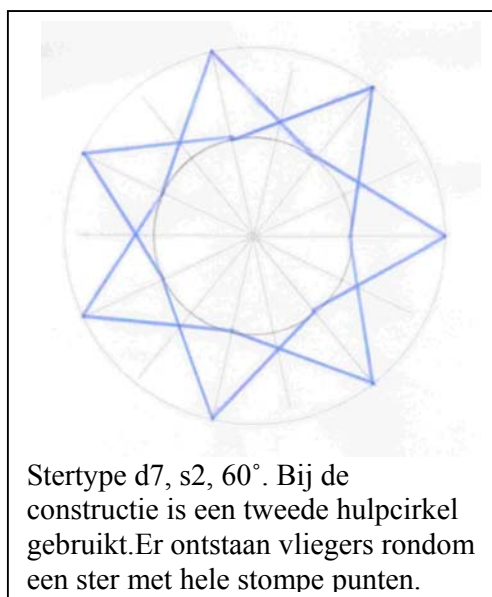


Het uitgangspunt: Een cirkel met 14 sectoren. Met de geodriehoek wordt een hoek van 30° uitgezet om een sterpunt van 60° te krijgen.



Nadat één zijde is getekend een hulp-cirkel trekken.

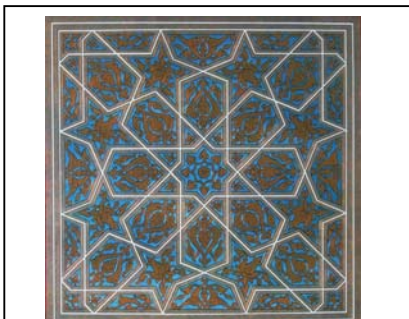
Resultaat: Stertype d7, s1, 60°



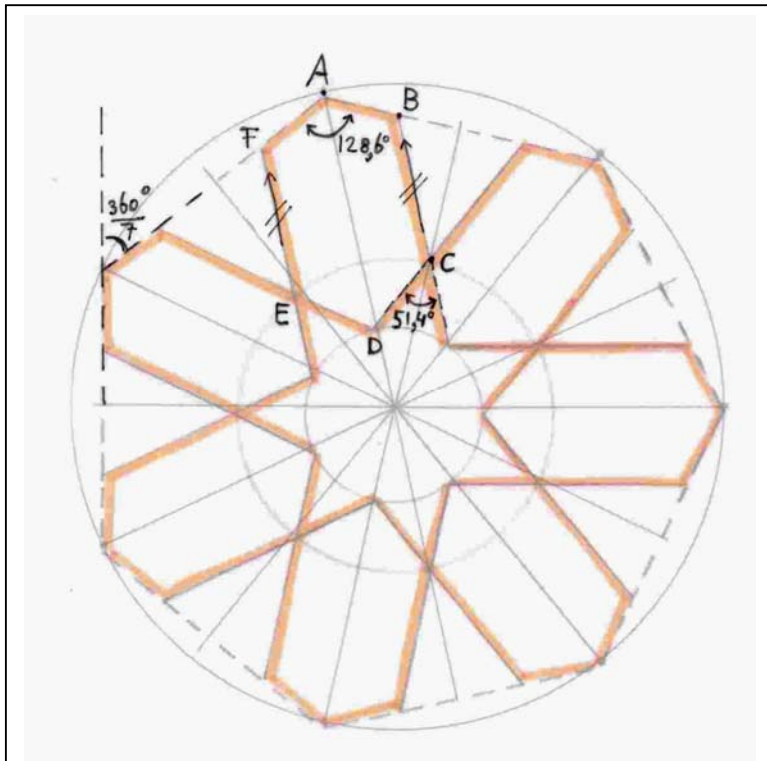
Stertype d7, s2, 60°. Bij de constructie is een tweede hulp-cirkel gebruikt. Er ontstaan vliegers rondom een ster met hele stompe punten.

De meeste rozetten ontstaan door uit te gaan van een regelmatige veelhoek. Als je één rondje ‘wandelt’ over de zijden van een regelmatige zevenhoek, ben je zeven keer de bocht om gegaan en ben je in totaal 360° gedraaid. Elke bocht is dus $360^\circ:7$. Van een zevenhoek zijn de hoeken dus één zevende deel van 360° minder dan 180° . Afgerond is dat $180 - 360/7 \approx 128,6^\circ$. De rozet van de figuur hiernaast is daarom van het type r1; $128,6^\circ$; $51,4^\circ$. De tweede hoek geeft de hoek van de punten van de ‘binnenster’ aan. Vaak is de som van deze twee hoeken precies 180° , waardoor meerdere hoekpunten in het rozet gelijk worden. Als dat het geval is en als ook geldt dat $AB = BC$, dan spreken we van een standaard-rozet. De rozet hiernaast is dus geen standaardrozet! De hulpcirkel door de punten C en E is daarvoor te klein, waardoor BC te lang wordt.

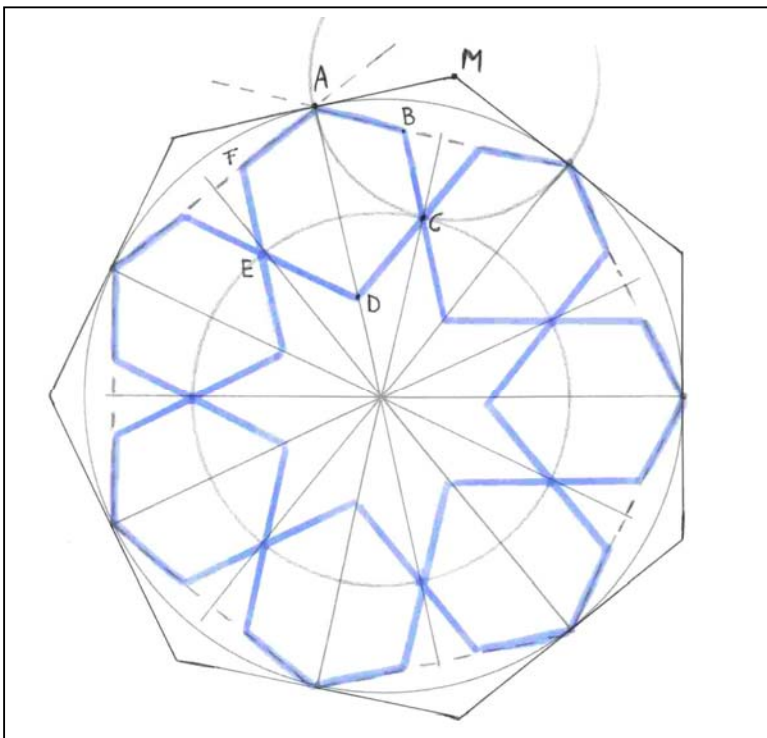
Rechts zie je hoe je een standaardrozet construeert. Bij deze constructie gebruik je een om de cirkel geschreven regelmatige veelhoek. De extra hulpcirkel door punt A, met middelpunt M legt de straal van de hulpcirkel door C en E vast.



Standaard-rozet op een boekomslag.
Type d8, r2, 135° , 45° .
(r2 omdat er vliegers rond de binnenster liggen.)



Rozet type d7, r1, $128,6^\circ$, $51,4^\circ$, niet-standaard, want BC is veel langer dan AB. Type r1 omdat alleen zeshoeken, en geen vliegers rond de binnenster liggen

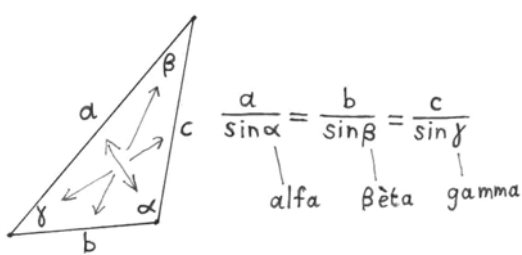


De constructie van een standaardrozet, type d7, r1, $128,6^\circ$, $51,4^\circ$. Om de ligging van C te bepalen is eerst een hulpcirkel met middelpunt M door A getrokken. Dan worden AB en BC evenlang.

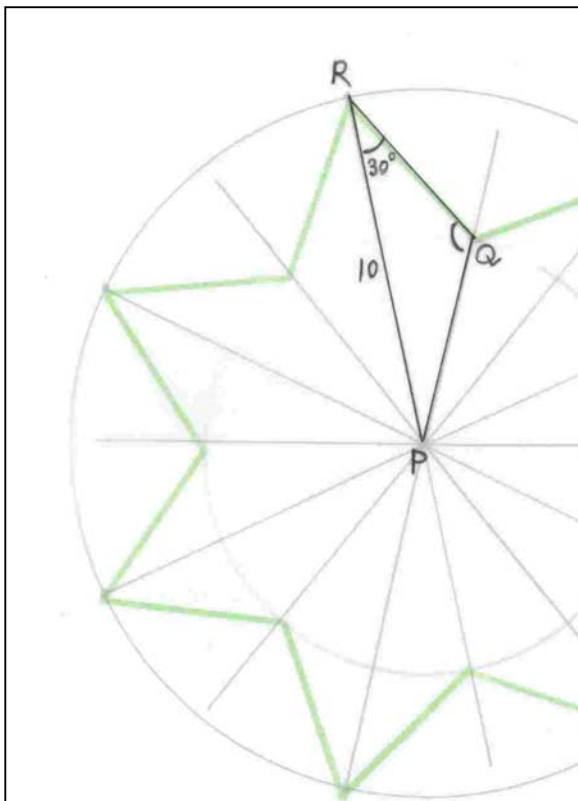
3.3 De oppervlakte berekenen van een ster

Je kunt de oppervlakte van een ster met p punten berekenen door de ster in $2p$ driehoeken te verdelen en de oppervlakte van één zo'n driehoekje te berekenen. Van dat driehoekje zijn de hoeken af te leiden uit het stertype. Als je verder voor het gemak uitgaat van een cirkelstraal van 10 cm, dan is de oppervlakte te berekenen. Het handigst gaat dit door gebruik te maken van de sinusregel (zie kader hiernaast). Hiermee kun je gemakkelijk de afmetingen bepalen van een driehoek waarvan je de hoeken kent en de lengte van één zijde.

Hieronder zie je de berekeningen voor de groene ster van bladzijde 15.



De **sinusregel** geldt in elke driehoek. In woorden:
De uitkomst van: Zijde gedeeld door de sinus van de tegenoverliggende hoek, is altijd hetzelfde, welke van de drie zijden je ook kiest.



De berekening van de oppervlakte van Stertype d7, s1, 60° met $PR = 10$ cm. De oppervlakte van de cirkel is $\pi \cdot 10^2 \approx 314$ cm². De ster neemt dus ongeveer $184 : 314 \cdot 100 = 58\%$ van de cirkel in.

Hoek **P** = $360 : 14 \approx 25,71^\circ$

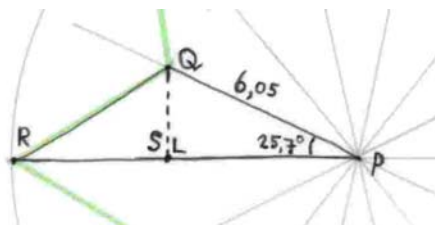
Hoek **Q** $\approx 180 - 30 - 25,71 \approx 124,29^\circ$

Zijde **PQ** berekenen met de sinusregel:

PQ : $\sin 30^\circ = 10 : \sin 124,29^\circ$, dus

PQ = $10 : \sin(124,29^\circ) \cdot \sin(30^\circ) \approx 6,05$ cm

Nu de hoogte **QS** berekenen:



Gebruik '**SOSCASTOA**' in driehoek **PQS**:

Sin (hoek **P**) = **QS** : **PQ**, dus

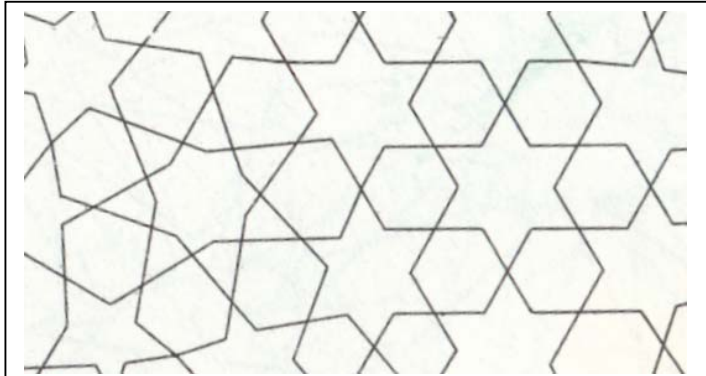
QS = $\sin(25,71^\circ) \cdot 6,05 \approx 2,625$ cm.

Oppervlakte driehoek PQR is dus:
 $0,5 \cdot 10 \cdot 2,625 \approx 13,12$ cm².

Opp. ster $\approx 13,12 \cdot 14 \approx 184$ cm².

3.4 Sterren en rozetten combineren

In islamitische mozaïeken worden vaak verschillende sterren en rozetten gecombineerd. Hierbij is het uitgangspunt dat kruisende lijnen bij aan elkander grenzende sterren of rozetten geen (of bijna geen) ‘bocht’ hebben. Daarom moet de eerste hoek die bij de ster- of rozettypering staat aangegeven steeds (ongeveer) gelijk zijn. (In het voorbeeld hiernaast is het verschil $8,4^\circ$ en valt niet heel erg op.) In de volgende opdracht ga je oefenen met het tekenen van sterren en rozetten.



Voorbeeld van de combinatie van twee rozetten van het type $d7, r2, 128,6^\circ, 49^\circ$ (links, niet-standaard) met $d6, r1, 120^\circ, 60^\circ$ (wel standaard) in een mozaïek. Wat opvalt, is dat tussen beide rozetten, boven elkaar, twee asymmetrische rozetten ontstaan.

Opdracht 7 (Individueel)

Maak sterren in de regelmatige veelhoeken in je werkboekje (**7a, b en c**). Houd je aan het type ster dat bij de werkbladen staat aangegeven. Als het stertype niet is aangegeven, of als bijvoorbeeld de hoek niet is ingevuld dan mag je zelf een geschikte keuze doen.

Kies van **d, e** en **f** minstens één opgave. Let op bij som **7e**: Bij de regelmatige vijfhoek staat $s_0, h108^\circ$. De nul betekent dat er geen ster, maar een vijfhoek ontstaat. Teken in de tienhoek een rozet dat mooi aansluit bij deze vijfhoek en schrijf ernaast welk type rozet, met welke hoeken je hebt gekozen.

Opdracht 8 (Individueel)

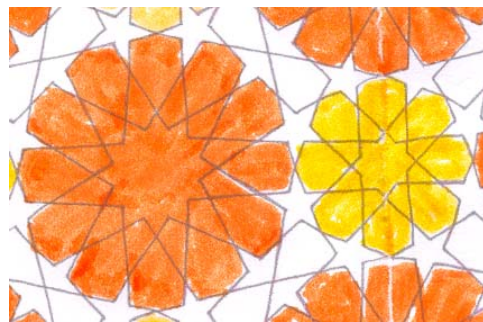
Bereken van de eerste ster van opdracht **7a** de oppervlakte. Ga uit van een cirkelstraal van 10 cm. Volg de aanpak van paragraaf 3.3.

3.5 Ster- en rozetdeterminatie

Nu kun je in bestaande mozaïeken gaan onderzoeken welk type ster of rozet erin voorkomt. Hiernaast is dat gedaan bij het mozaïek uit Yazd.

Opdracht 9 (Individueel)

Determineer volgens dezelfde methode minstens twee andere sterren en rozetten in de mozaïeken die je al hebt geanalyseerd bij opdracht **6**. Noteer ook of, en zo ja waar de hoeken van de sterren in de rest van het patroon voorkomen.



Het mozaïek uit Yazd.

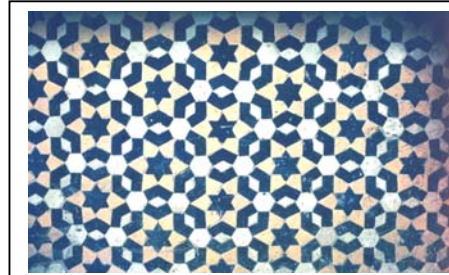
De twee rozetten zijn van het type: $d12, r2, 150^\circ, 38^\circ$ en $d8, r2, 135^\circ, 45^\circ$. Het $d12$ -rozet is dus geen standaardrozet ($150 + 38 \neq 180^\circ$). Bij de raakpunten van de twee rozetten maken de kruisende lijnen een ‘bochtje’ van $(150 - 135) : 2 = 7,5^\circ$.

3.6 Het gebruik van basispatronen

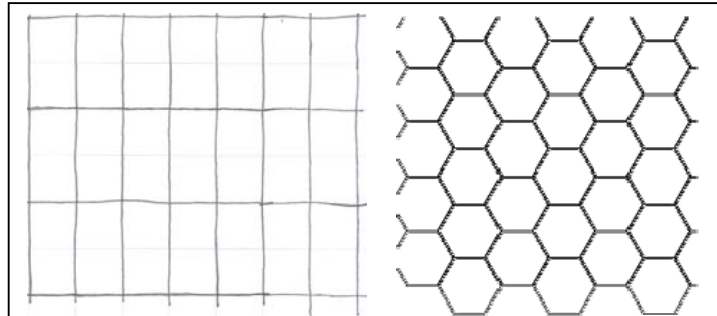
In alle mozaïeken die je tot nu toe gezien hebt vormen de cellen samen een netwerk waarop het patroon ligt. Bij het zeshoek-sterpatroon van hoofdstuk 1 bijvoorbeeld zijn de cellen vierkanten en ziet het netwerk er hetzelfde uit als ruitjespapier. Bij andere mozaïeken is het netwerk opgebouwd uit rechthoeken, vierkanten, regelmatige zeshoeken of uit gelijkzijdige driehoeken. Het belangrijkste kenmerk van deze netwerken is dat er maar één tegelvorm wordt gebruikt.

Er is ook een groot aantal islamitische mozaïeken waarbij een ander soort achterliggend patroon is te herkennen. Dit zogenaamde basispatroon mag uit meer dan één soort tegel bestaan. Ze hebben als kenmerk dat alle tegels van het basispatroon (prototegels) zijden hebben met gelijke lengte. Het basispatroon kun je dus bij wijze van spreken met luciferhoutjes maken. Verder is er een vaste regel die gebruikt wordt bij het ontwerpen van een mozaïek op een basispatroon: Op de middens van de zijden van elke prototegel liggen hoekpunten van tegels van het

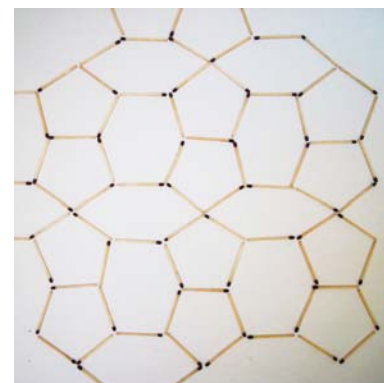
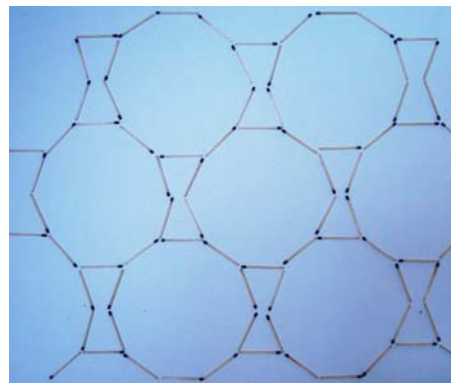
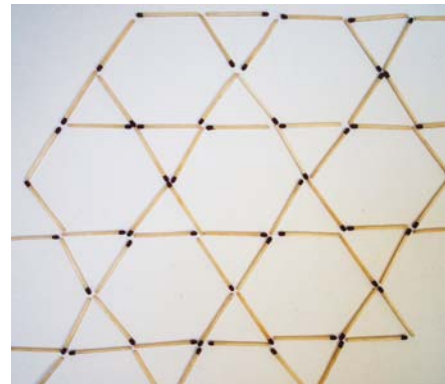
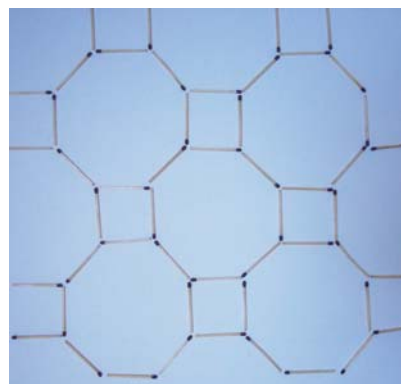
uiteindelijke mozaïek. Precieser: Op het midden van elke zijde van de prototegels ligt een 'kruispunt' met een vast gekozen snijhoek. Vrijwel alle basispatronen hebben regelmatige veelhoeken. Wordt op deze basispatronen bovenstaande regel toegepast, dan ontstaan bijna als vanzelf sterren of rozetten in die veelhoeken. Merk op, dat je deze aanpak bij opgave **7b**, **e** en **f** feitelijk al hebt gebruikt!



Fez, Marokko: Netwerk van gelijkzijdige driehoeken, maar er is geen basispatroon.

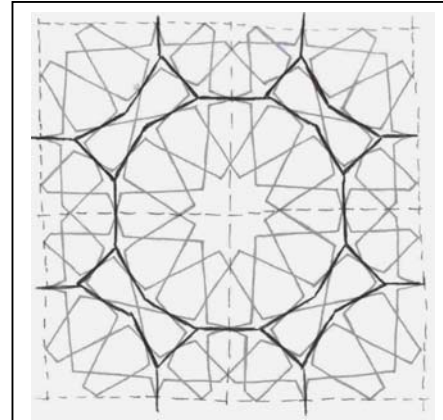


Voorbeelden van netwerken: Er is telkens slechts één tegelvorm waaruit het netwerk is opgebouwd.



Enkele basispatronen, gelegd met luciferhoutjes. Vergelijk het patroon linksboven met opgave **7b**. Wat valt je op?

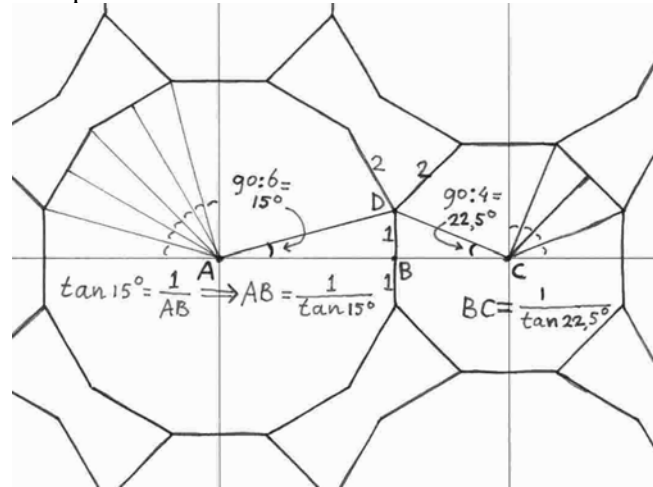
Hoe kun je bij bestaande mozaïeken een basispatroon vinden? Zoek daarvoor eerst de lokale draaisymmetrieën en trek cirkels (Basisanalyse stap 3). Wanneer er kruisende lijnen zijn op raakpunten van de cirkels, dan kan er sprake zijn van een basispatroon. Teken regelmatige veelhoeken rond de cirkels en controleer of er zo inderdaad een patroon ontstaat dat voldoet aan de regels voor een basispatroon. Als dat klopt, dan is de kans groot dat de ontwerper destijds dit basispatroon gebruikt heeft. (Maar zeker weten doe je dat dan nog niet! Daarvoor zijn uiteindelijk originele ontwerptekeningen nodig waarop een basispatroon te zien is. Maar daarvan zijn er helaas niet veel bewaard.)



Het mozaïek uit Yazd blijkt een basispatroon te hebben.

Als dit wordt toegepast op het mozaïek uit Yazd, dan blijkt dat er bij dit mozaïek inderdaad een achterliggend basispatroon is dat bestaat uit regelmatige twaalfhoeken, regelmatige zeshoeken en 'strikjes'. Uit het basispatroon volgt dat de straal van de grote cirkel $\tan(22,5^\circ) / \tan(15^\circ) \approx 1,55$ keer zo groot moet zijn als de straal van de kleine cirkels. (berekening zie hiernaast.) Dit klopt vrij nauwkeurig! De aanname dat dit basispatroon daadwerkelijk gebruikt is bij het ontwerp wordt hiermee versterkt.

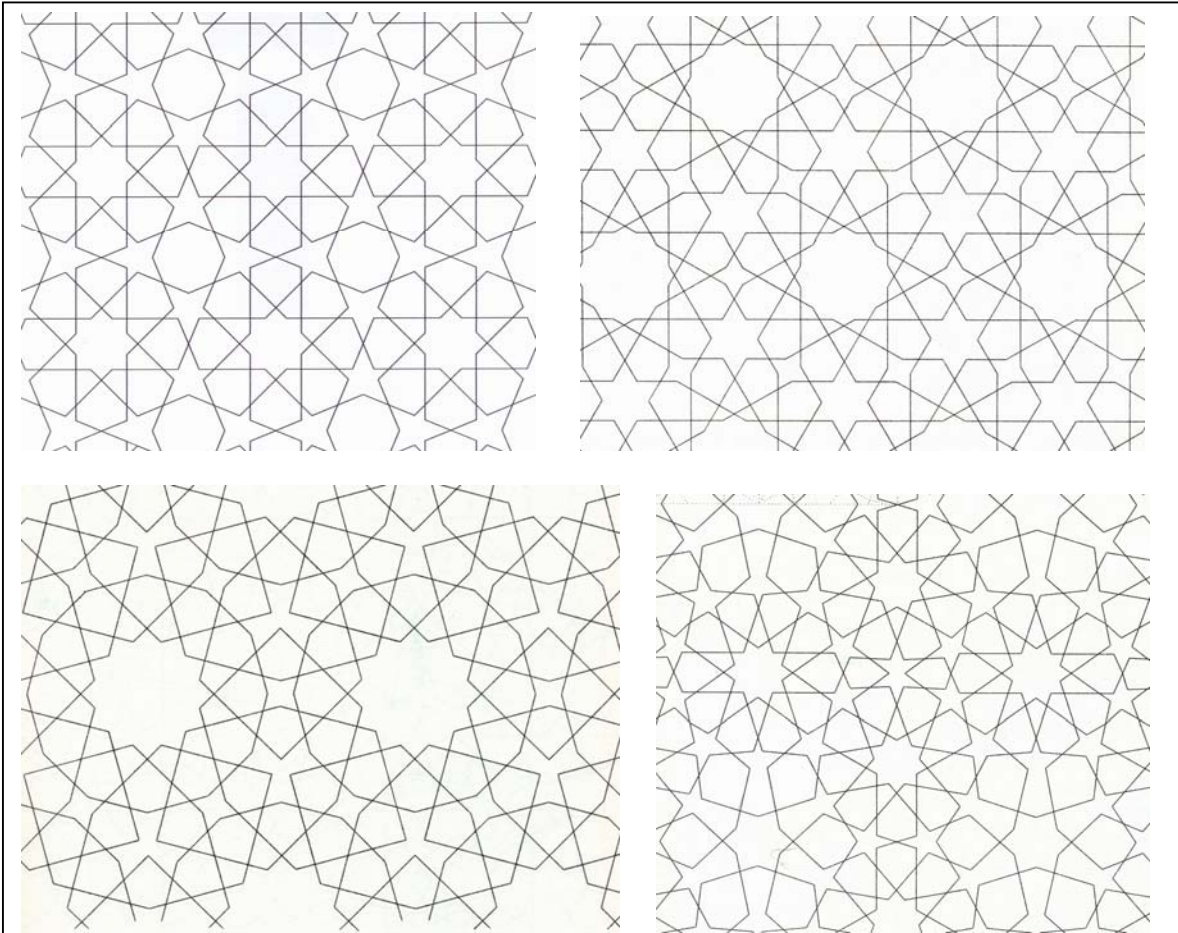
Berekening van de verhouding tussen de straal van de grote en die van de kleine cirkel, uitgaande van het basispatroon van het mozaïek uit Yazd.



Straal grote cirkel = AB, straal kleine cirkel = BC.
Voor het gemak zijn de zijden van de prototegels op lengte 2 gesteld. De lengte van DB is dan 1.

Opdracht 10 (Individueel)

- a) Het mozaïek uit Granada van opdracht 5 heeft ook een basispatroon. Gebruik overtrekpapier om dit basispatroon aan te geven.
- b) De onderstaande mozaïeken, die ook in het werkboekje staan, hebben alle vier een onderliggend basispatroon. Probeer deze te vinden. Gebruik de hierboven beschreven methode.



Het mozaïek linksboven is te vinden op de Grote Moskee van Kairouan (Tunesië) en is al ontworpen in de zevende eeuw.

4 Varianten van een mozaïek zelf maken

In de eerste drie hoofdstukken heb je kennism gemaakt met een aantal verschillende mozaïeken en bekeken welke meetkundige eigenschappen ze hebben. Nu ga je de geleerde technieken toepassen: Je gaat zelf een mozaïek ontwerpen.

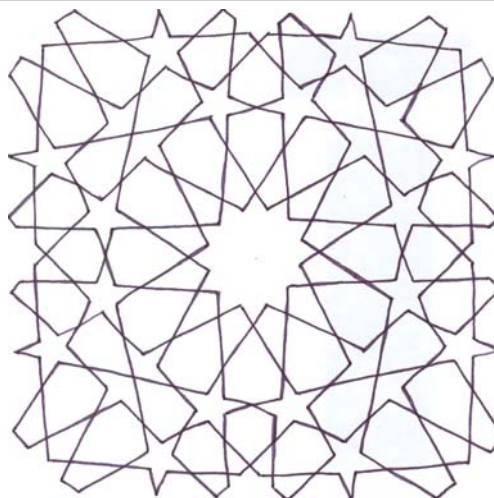
Er zijn talloze manieren om een mozaïek te ontwerpen en om bestaande mozaïeken te veranderen. In deze lesserie kijken we alleen naar het laatste: Hoe kun je een bestaand patroon zo veranderen, dat een nieuw mozaïek ontstaat met een heel andere uitstraling? Je kunt kiezen uit de volgende opties:

I: Rozetvariatie

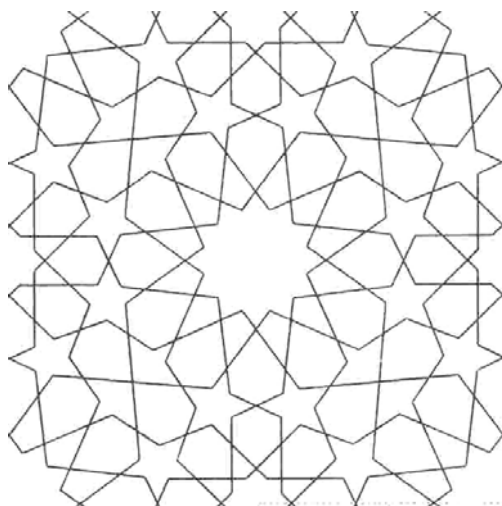
In bestaande mozaïeken waarin een rozet is verwerkt kun je de vorm van de 'binnenkant' van het rozet veranderen zonder dat de structuur van de rest van het mozaïek verandert: Het meest eenvoudig is om van een type r1-rozet een type r2-rozet te maken (of omgekeerd). Maar je kunt ook de tweede hoek variëren. Dan verandert de grootte van de ster in het midden, maar blijft de buitenrand van het rozet ongewijzigd.

II Hoekvariatie

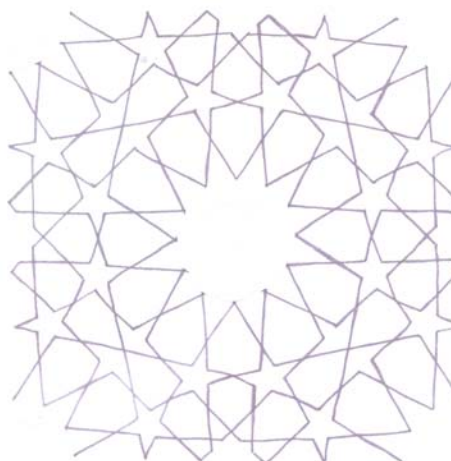
Dit kan bijvoorbeeld wanneer het bestaande mozaïek een basispatroon heeft. Dan kun je de hoek waarmee de lijnen van het mozaïek zelf elkaar snijden variëren waardoor het gehele patroon verandert (maar het basispatroon blijft hetzelfde!) Voorbeeld: Zie opdracht **7b**: de regelmatige vierkanten en achthoeken vormen samen een basispatroon. Door andere sterren, of rozetten te kiezen, met andere hoeken, ontstaat een totaal ander mozaïek!

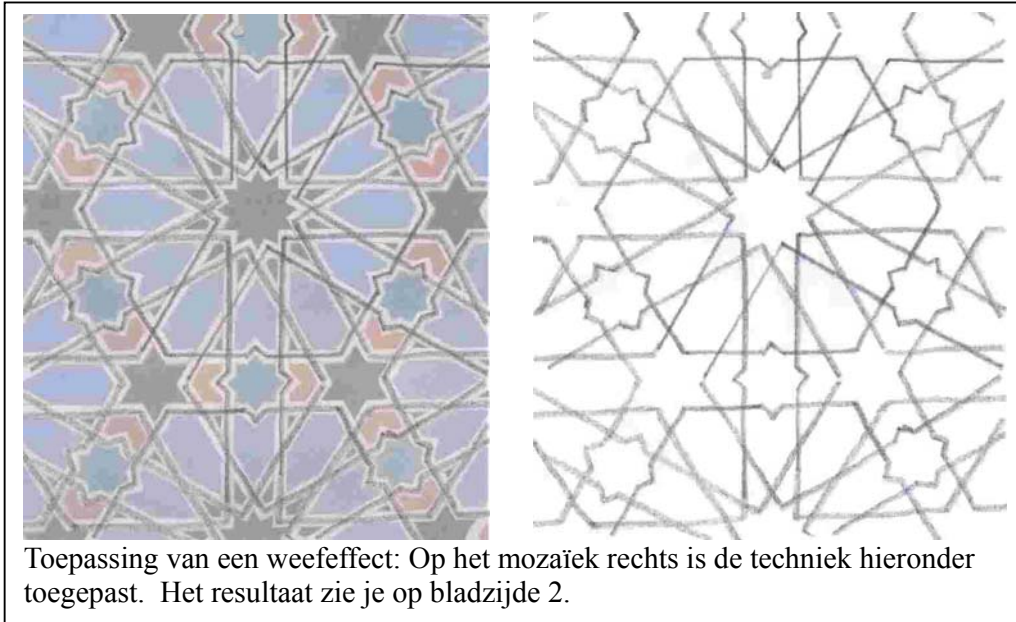


Een voorbeeld van rozetvariatie: Het patroon uit Yazd (boven) krijgt grotere twaalfpuntige 'binnen'-sterren (onder) door de tweede hoek iets groter te maken: 45° in plaats van 38° . Het verschil is niet groot en kan extremer, alleen is bij een sterke verandering de kans groot dat het mozaïek uit balans raakt.



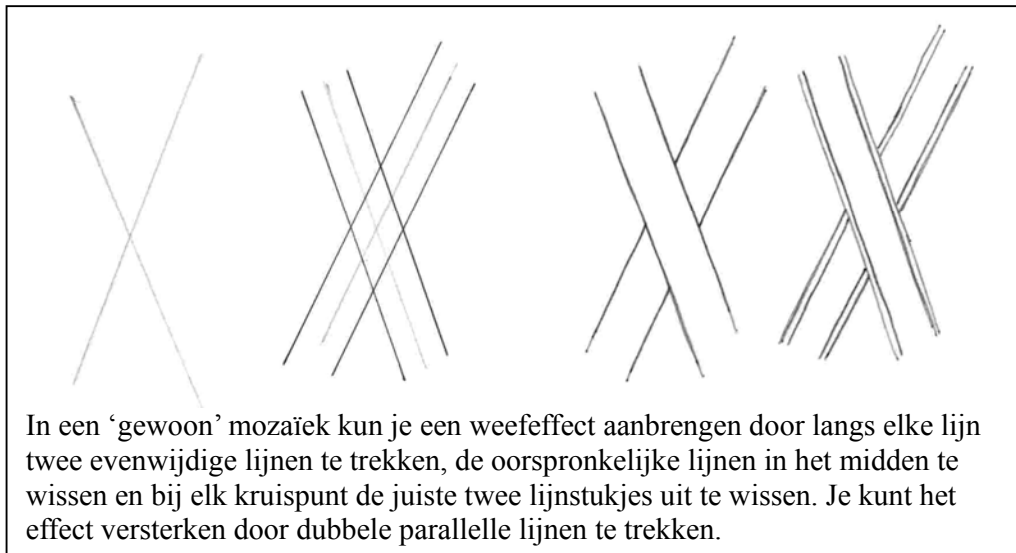
Hieronder is van het type d12, r2-rozet een r1-rozet gemaakt door lijnstukjes te wissen.





III Weefeffect

Dit onderwerp is nog niet aan de orde geweest, maar je hebt wel al voorbeelden gezien van een weefeffect. Een weefeffect kun je aanbrengen bij een ‘gewoon’ mozaïek door eerst alle grenslijnen in de cel te verbreden tot twee evenwijdige lijnen (er ontstaan ‘bandjes’) en daarna bij alle snijpunten één tweetal evenwijdige lijnstukjes te wissen zodat het lijkt alsof het ene bandje onder het andere door loopt. Kies bij voorkeur een mozaïek waarvan alle snijpunten kruispunten van vier wegen zijn.



Opdracht 11 (I en misschien G)

Kies twee mozaïeken die je aanspreken en besluit op welke wijze je een variant wilt ontwerpen. Kies uit de opties: Rozetvariatie, hoekvariatie van het basispatroon of weefeffect. Heb je een ander idee dan één van deze drie opties, dan mag dat ook. Maar maak het niet te moeilijk! Ontwerp de cellen die bij deze varianten horen.

Bereid een vlammend betoog voor om ervoor te zorgen dat één van de twee ontwerpen door je groepje wordt gekozen! (zie opdracht 12.) Schrijf alvast op hoe elk van de twee mozaïekvarianten zouden moeten worden ingekleurd/versierd. Je kunt op de site www.patterninislamicart.com kijken voor inspiratie.

5 Een variant uitwerken

Elke groep gaat één mozaïekvariant op posterformaat tekenen. Op een tweede poster wordt een volledige analyse gepresenteerd van het mozaïek. Zorg dat beide posters van een paar meter afstand een mooi beeld opleveren. Ontwerp dus niet al te kleine tegeltjes (één cel zal, afhankelijk van de complexiteit, afmetingen rond 20 tot 30cm hebben) en maak bij de analyse een overzichtelijke layout van de poster, werk met koppen en een grote, goed leesbare letter.

Opdracht 12 (groepsopdracht)

Laat elkaars ontwerpen van nieuwe mozaïeken zien. Bespreek welke jullie het mooiste vinden en het meest geschikt is om op posterformaat te gaan tekenen. Uiteindelijk moeten jullie samen tot één keuze komen.

Beslis vervolgens hoe groot een cel moet worden en welke kleuren de tegels krijgen en dergelijke.

Vervolgens verdeel je de taken. Dit is wat er moet worden gedaan:

Voor de poster met een groot mozaïek:

-Een cel op de juiste schaal tekenen.

-De cel (en indien nodig het spiegelbeeld) een aantal keer overtrekken op het postervel zodat een groot deel bedekt is.

-De randen van het mozaïek mooi afwerken.

-Het mozaïek inkleuren/versieren.

Voor de poster met de mozaïekanalyse:

Een analyse van het mozaïek maken en presenteren op een tweede postervel. Ga te werk zoals in de opdrachten **5**, **6**, **8**, **9** en (indien van toepassing) **10**. Als het mozaïek is ontworpen vanuit een basispatroon, dit ook laten zien in de analyse. Licht de analyse goed toe zodat een leek het kan volgen! Bij de analyse hoort dus ook een tekening met alle (lokale) symmetrieën, een tekening van een cel en een overzicht van alle tegels met kenmerken. Presenteer ook berekeningen van de oppervlaktes van minstens één ster en één ander type tegel die in het mozaïek voorkomt. Leg hierbij uit hoe je te werk bent gegaan en laat de berekeningen zien.

Opdracht 13 (individuele eindopdracht)

Kies individueel één van de twee mozaïeken die je in opdracht **11** hebt ontworpen (niet het mozaïek van opdracht **12!**). Werk ook dit mozaïek uit zoals in opdracht **12**, maar op een kleinere schaal: Zorg ervoor dat er ongeveer 6 cellen op een A-3 blaadje passen. De uiteindelijke tekening mag niet groter dan een A-3 formaat worden en hoeft niet verder te worden ingekleurd of versierd. (Dat kost veel te veel tijd). Maak wel ook een complete analyse van het mozaïek, maar je hoeft slechts van één ster of regelmatige veelhoek in je mozaïek de oppervlakte te berekenen.

6 Afronding

6.1 Wat wordt er ingeleverd?

Elke groep levert uiteindelijk drie (eventueel vier) posters in:

- I. Een poster die hoort bij opdracht **1** met het zeshoek-kruispatroon van gekleurde vouwblaadjes en de presentatie van de antwoorden van opdracht **1**. Zorg dat alles voor een leek is te volgen. Dus ook de vragen op de poster vermelden!
- II. Een poster met een mozaïekvariant, ingekleurd en/of versierd (opdracht **12**).
- III. Een poster met een analyse van de mozaïekvariant (zie ook opdracht **12**)
- IV. Een poster van de klas of van elke groep met een Escherachtig islamitisch mozaïek waarin de sterren veranderen van stomppuntig naar spitspuntig (opdracht **3**).

De posters worden beoordeeld op grond van een aantal criteria. Hierover geeft je docent informatie. Als je die niet hebt, vraag er dan naar!

Het individuele cijfer wordt bepaald aan de hand van het werkboekje. Hierin komen de uitwerkingen van alle individuele opdrachten. Zorg ervoor dat het compleet is. Voeg achterin het a3-vel met je individuele mozaïekvariant en de analyse toe.

6.2 Tot slot

Je hebt in korte tijd kennismaat met de fascinerende geschiedenis van de islamitische traditie van het ontwerpen van geometrische mozaïeken. Deze traditie, die in de middeleeuwen tot bloei kwam, herbergt nog heel veel geheimen. Zelfs nu nog, in de 21^{ste} eeuw, worden ontdekkingen gedaan over ontwerpen uit die tijd die zo vernuftig zijn dat ze wiskundigen verbazen. Er zijn verbanden met architectuur, kunst en moderne wiskundige disciplines als groepentheorie en kristallografie. Er zijn mozaïeken gevonden die zo complex zijn dat ze doen denken aan de zogenaamde a-periodieke betegelingen die in de westerse wereld pas rond 1970 ontdekt werden. Het geduld waarmee vele ontwerpers en talloze vaklieden destijds gewerkt hebben heeft een schat aan kunstwerken opgeleverd.

Er is al heel veel gepubliceerd over dit onderwerp. Ook op het internet kun je veel informatie vinden, zoals op de al genoemde site www.patterninislamicart.com met een groot archief foto's van mozaïeken en ook veel interessante links. Maar het zou nog veel mooier zijn om de mozaïeken en de rest van de verfijnde islamitische architectuur (zoals de muqarnas) zelf, in het echt te bewonderen. Mocht je ooit de kans krijgen, laat je niet weerhouden!